Ejemplos: cálculo de factores invariantes a partir de la matriz catacterística

Se dan a continuación algunos ejemplos de cálculo de los factores invariantes de una matriz $A \in F^{n\times n}$ a partir de la matriz característica $XI - A \in F[X]^{n\times n}$. Como se explica en [1, Sección 7.4], el método consiste en encontrar la forma normal de Smith de $XI - A$ mediante operaciones elementales de filas y/o columnas de alguno de los siguientes tipos:

1. Permutar dos filas (columnas): $F_i \leftrightarrow F_j$ ($C_i \leftrightarrow C_j$);
2. Multiplicar una fila (columna) por un escalar no nulo $c \in F$: $F_i : cF_i$ ($C_i : cC_i$);
3. Sumar a la fila i f veces la fila j, donde $f \in F[X]$, $i \neq j$: $F_i : F_i + fF_j$ ($C_i : C_i + fC_j$).

Ejemplo 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ver Ejercicio 5 del Práctico 5 (adicional)). La matriz característica es

$$XI - A = \begin{pmatrix} X & -3 & 1 \\ 1 & X+2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}.$$

Se pueden realizar, por ejemplo, las siguientes operaciones elementales:

$$F_1 - XF_2 : \quad \begin{pmatrix} 0 & -(X^2+2X+3) & 1 \\ 1 & X+2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 \leftrightarrow F_1,\ F_2 : (-1)F_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & X+2 & 0 \\ 0 & X^2+2X+3 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix},$$

$$C_2 - (X+2)C_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+2X+3 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix},$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X^2+2X+3 \\ 0 & X-2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_3 + (X-2)F_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X^2+2X+3 \\ 0 & 0 & (X-2)(X^2+2X+3) \end{pmatrix},$$

$$C_3 + (X^2+2X+3)C_2,\ C_2 : (-1)C_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-2)(X^2+2X+3) \end{pmatrix}.$$

Dado que la última matriz está en la forma normal de Smith, se tiene que los factores invariantes de A son $p_1 = p = f = (X-2)(X^2+2X+3) = X^3 - X - 6$. La forma racional de A es

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matriz característica es

$$XI - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Se realizan las siguientes operaciones elementales (cuya descripción explícita se omite):

$$XI - A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & X+1 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(X-2)(X+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (X-2)(X+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (X-2)(X+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Como la última matriz está en la forma normal de Smith, se deduce que los factores invariantes de A son $p = p_1 = (X-2)(X+1)^2$, $p_2 = (X+1)^2$. La forma racional de A es entonces

$$\begin{pmatrix} C(p_1) & 0 \\ 0 & C(p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Referencias

[1] K. Hoffman, R. A. Kunze, *Álgebra lineal*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1973.